

ერთეულოვან სფეროზე ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი

Generalized Laplace operator on the unit sphere

იოსებ ფოჩხუა - ფიზიკა-მათემატიკის დოქტორი, ასოც. პროფესორი
საქართველოს ეროვნული უნივერსიტეტი
Ioseb Pochkhua - Doctor of Physics and Mathematics. Assoc. Professor
Georgian National University

დაუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x_0 \in S^{k-1}$ სფერული წერტილის მიდამოში ანუ $D^{k-1}(x_0; \rho)$ სიმრავლეზე და ინტეგრებადია $C^{k-2}(x_0; h)$ სფეროზე ნებისმიერი $h < \rho$ -სთვის. თუ x_0 წერტილის მიდამოში არსებობს $a_0, a_1, \dots, a_r$ რიცხვთა მიმდევრობა ისეთი, რომ სრულდება პირობა

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|S^{k-2}| \sin^{k-2} h} \int_{C^{k-2}(x_0; h)} f(t) dS^{k-2}(t) = \\ & \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{k-1}{2}} \sin^{k-2} h} \int_{C^{k-2}(x_0; h)} f(t) dS^{k-2}(t) = \\ & \sum_{v=0}^r \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) a_v}{v! 2^v \Gamma\left(\frac{k-1}{2} + v\right)} (1 - \cosh)^v + o(1 - \cosh)^r, \end{aligned} \quad (1)$$

მაშინ ვიტყვით, რომ ერთეულოვან S^{k-1} სფეროზე $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე გააჩნია r რიგის ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და ავღნიშნავთ $\overline{\Delta^r} f(x_0)$ -ით. (1) ტოლობით გასაზღვრული ლაპლასის ოპერატორი a_v ($v = 0, r$) რიცხვებთან დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$\overline{\Delta^0} f(x_0) = a_0 = f(x_0),$$

$$\overline{\Delta} \left[\overline{\Delta} + (k-1) \right] \left[\overline{\Delta} + 2k \right] \cdots \left[\overline{\Delta} + (v-1)(v+k-1) \right] \\ 3fx_0 = av, \quad v=1, r, \quad (2)$$

სადაც $\overline{\Delta} \cdot \overline{\Delta} \cdot \overline{\Delta} \cdots \overline{\Delta}(i - \text{ჯერ}) = \overline{\Delta}^i$ და $\overline{\Delta}^i \cdot \overline{\Delta}^j = \overline{\Delta}^{i+j}$, როცა $i, j \geq 0$ და $i+j \leq r$.

ასე, რომ (1) შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{1}{|S^{k-2}| \sin^{k-2} h} \int_{C^{k-2}(x_0; h)} f(t) dS^{k-2}(t) \\ = \overline{\Delta}^0 f(x_0) \\ + \sum_{v=1}^r \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \overline{\Delta} \left[\overline{\Delta} + (k-1) \right] \left[\overline{\Delta} + 2k \right] \cdots \left[\overline{\Delta} + (v-1)(v+k-3) \right] f(x_0)}{v! 2^v \Gamma\left(\frac{k-1}{2} + v\right)} (1 \\ - \cosh)^v + o(1 - \cosh)^r, \\ r = 1, 2, \dots$$

მარტივად შეიძლება შევნიშნოთ, რომ

$$a_1 = \overline{\Delta}^1 f(x_0) = \overline{\Delta} f(x_0) = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|S^{k-2}| \sin^{k-2} h} \int_{(x_0; t) = \cosh} f(t) dS^{k-2}(t) - f(x_0)}{\frac{2}{k-1} \sin^2 \frac{h}{2}}.$$

ახლა შემოვიტანოთ ერთეულოვან S^{k-1} სფეროზე უფრო განზოგადოებული ლაპლასის ოპერატორის ცნება.

ვიტყვი, $x_0 \in S^{k-1}$ წერტილის სფერულ მიდამოში ინტეგრირებადი $f(x_0)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე გააჩნია უფრო განზოგადოებული r რიგის ლაპლასის ოპერატორი $\overline{\Delta}^r f(x_0)$, თუ სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{1}{|D^{k-1}(x_0;h)|} \int_{D^{k-1}(x_0;h)} f(t) dS^{k-1}(t) = \sum_{\nu=0}^r \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) b_\nu}{\nu! 2^\nu \Gamma\left(\frac{k+1}{2} + \nu\right)} (1 - \cosh \nu + o(1) - \cosh r, \quad r \geq 0,$$

(3)

ასე განსაზღვრული ლაპლასის უფრო განზოგადოებული $\widetilde{\Delta}^r$ ოპერატორის b_ν ($\nu = \overline{0, r}$) კოეფიციენტებთან დამოკიდებულია ისევე როგორც (2) ტოლობაშია ნაჩვენები.

ცხადია, რომ $b_0 = f(x_0)$ და

$$b_1 = \widetilde{\Delta}^1 f(x_0) = \widetilde{\Delta} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|D^{k-1}(x_0;h)|} \int_{D^{k-1}(x_0;h)} f(t) dS^{k-1}(t) - f(x_0)}{\frac{2}{k+1} \sin^2 \frac{h}{2}}.$$

ლაპლასის განზოგადოებული $\overline{\Delta}^r f(x_0)$ ოპერატორსა და ლაპლასის უფრო განზოგადოებული $\widetilde{\Delta}^r f(x_0)$ ოპერატორის შორის კავშირს ადგენს შემდეგი ლემა.

ლემა. ა)თუ x_0 წერტილზე არსებობს $\overline{\Delta}^r f(x_0)$, მაშინ აგრეთვე არსებობს $\widetilde{\Delta}^r f(x_0)$ და $\overline{\Delta}^r f(x_0) = \widetilde{\Delta}^r f(x_0)$.

ბ) არსებობს ისეთი ფუნქცია $f(x_0)$, რომლისთვისაც $\widetilde{\Delta}^r f(x_0)$ სასრულია, ხოლო $\overline{\Delta}^r f(x_0)$ ოპერატორი კი არც არსებობს.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. Топурия С.Б. Граничные свойства продифференцированного интеграла Пуассона для различных областей и их некоторые применения. Тбилиси 2003
2. Summability C of series of surface spherical harmonics. Trans.Amer. Math. Soc., 104, N2 (1962), 284-307.